

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XV**, 9.

---

# ÜBER DIE INNERE PAAR- ERZEUGUNG BEIM $\beta$ -ZERFALL

VON

N. ARLEY UND C. MØLLER



KØBENHAVN  
LEVIN & MUNKSGAARD  
EJNAR MUNKSGAARD  
1938

Printed in Denmark.  
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

In einer früheren Note hat der eine von uns<sup>1</sup> darauf hingewiesen, dass beim  $\beta$ -Zerfall ausser den gewöhnlichen Elektronen stets auch Positronen zu erwarten sind. Eine vorläufige grobe Abschätzung der Wahrscheinlichkeit dieser Prozesse ergab für die relative Anzahl  $\frac{N^+}{N^-}$  der emittierten Positronen und Elektronen die Grössenordnung  $10^{-4}$  in Übereinstimmung mit den Experimenten von ALICHANOW, ALICHANIAN und KOSODAEW<sup>2</sup>. Eine genauere numerische Auswertung von  $\frac{N^+}{N^-}$  für die in diesen Experimenten auftretenden  $\beta$ -Energien zeigte jedoch, dass die theoretisch zu erwartenden Positronenanzahlen viel zu klein sind, um diese Experimente erklären zu können.

Nach der Fermischen Theorie<sup>3</sup> besteht ein  $\beta$ -Zerfall darin, dass sich ein Neutron in ein Proton verwandelt unter gleichzeitiger Emission eines Elektrons und eines Neutrinos. Weiter ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein solcher Prozess stattfindet, in erster Näherung proportional dem Quadrat der universellen Konstante  $g$  der Fermischen Theorie. Wegen der elektrischen Ladung des Elektrons und des Protons stehen diese Teilchen in elektromagnetischer Wechselwirkung mit den virtuellen Elektronen, welche nach der DIRAC'schen Theorie<sup>4</sup> des Positrons alle

<sup>1</sup> C. MÖLLER, Nature, 137, 314 (1936).

<sup>2</sup> A. I. ALICHANOW, A. I. ALICHANIAN, M. S. KOSODAEW, Journ. de Phys. 7, 163 (1936).

<sup>3</sup> E. FERMI, Zs. f. Phys. 88, 161 (1934).

<sup>4</sup> DIRAC, Principles of Quantum Mechanics, 238 (1930).

Zustände negativer Energie auffüllen. Diese Wechselwirkung bewirkt, dass das  $\beta$ -Elektron während seiner Erzeugung einen Teil seiner Energie an ein Elektron in einem negativen Zustand abgeben kann, wobei das letztere Elektron in einen Zustand positiver Energie übergeht. Es entsteht dabei in der Verteilung der Elektronen in den negativen Zuständen ein »Loch«, welches in der DIRAC'schen Theorie als ein Positron interpretiert wird. Man erhält also in dieser Weise in höherer Näherung die Möglichkeit eines Prozesses bei dem sich ein Neutron in ein Proton verwandelt unter gleichzeitiger Emission eines Neutrinos, zweier Elektronen und eines Positrons.

Da die Wechselwirkungsenergie zwischen zwei Teilchen der Ladung plus oder minus  $e$  in erster Näherung proportional  $e^2$  ist, wird die Wahrscheinlichkeit des erwähnten Prozesses proportional  $(ge^2)^2$ , oder aus dimensionellen Gründen proportional  $(g\alpha)^2$ , wo  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$  die Feinstrukturkonstante bedeutet. Für  $\frac{N^+}{N^-}$  ergibt sich also

$$\frac{N^+}{N^-} = k \cdot \alpha^2,$$

wo  $k$  eine Funktion der oberen Grenze des  $\beta$ -Spektrums ist, die wir in § 1 und § 3 genauer bestimmen werden (vgl. Fig. 2).

Wie aus § 1 hervorgeht, haben wir den Prozess bei dem die zwei Elektronen und das Positron entstehen als einen Elementarprozess höherer Näherung behandelt. Man kann jedoch formal denselben Prozess auch als einen zusammengesetzten Prozess behandeln, indem man erst das emittierte  $\beta$ -Teilchen durch eine ausgehende Kugelwelle mit bestimmter Energie und mit einer Singularität im Nullpunkt

darstellt, und dann die Wahrscheinlichkeit einer Paarerzeugung durch diese Kugelwelle berechnet<sup>1</sup>. Trotzdem die beiden Methoden in ihren Ausgangspunkten sehr verschieden sind, liefern sie doch, wie wir in § 2 zeigen werden, dieselbe Endformel. Dieses Resultat ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis von KNIPP und UHLENBECK<sup>2</sup>, welche gezeigt haben, dass die beiden Methoden auch bei der Berechnung der Ausstrahlung von Lichtquanten beim  $\beta$ -Zerfall dasselbe Resultat liefern. Es muss jedoch bemerkt werden, dass man bei unserem Prozess im Gegensatz zu dem Prozess von KNIPP und UHLENBECK die Ladung des Protons mitberücksichtigen muss. In unserem Fall erhält man nämlich nur Übereinstimmung zwischen der von uns und der von TISZA benutzten Methode, wenn man in der letzteren der Ladung des entstehenden Protons in einer von ihm angegebenen Weise Rechnung trägt (vergl. § 2).

### § 1.

Wie in der Einleitung erwähnt, kann sich ein Neutron nach der Fermischen Theorie in ein Proton verwandeln unter gleichzeitiger Emission eines Elektrons und eines Neutrinos. Die Wahrscheinlichkeit dieses Prozesses ist in erster Näherung bestimmt durch das Matrixelement der Wechselwirkungsenergie zwischen den schweren und den leichten Teilchen (Neutronen, Protonen beziehungsweise Elektronen, Neutrinos).

Geht das Neutron vom Zustand  $N$  über in ein Proton im Zustand  $P$  unter Emission eines Elektrons im Zustand  $s$  und eines Neutrinos im Zustand  $\sigma$ , hat dieses Matrixelement die folgende Form

<sup>1</sup> Vergl. L. TISZA, Sow. Phys. 11, 425 (1937).

<sup>2</sup> J. K. KNIPP und G. UHLENBECK, Physica, III, 425 (1936).

$$(P|c_{s\sigma}|N) = g \int \Phi_N(\mathbf{X}) \bar{\psi}_p(\mathbf{X}) \cdot \bar{\psi}_s(\mathbf{X}) \delta \bar{q}_\sigma(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, \quad (1)$$

wobei  $\Phi_N(\mathbf{X})$ ,  $\psi_p(\mathbf{X})$ ,  $\psi_s(\mathbf{X})$  und  $q_\sigma(\mathbf{X})$  die Eigenfunktionen des Neutrons, Protons, Elektrons und Neutrinos in den betreffenden Zuständen sind, und die Integration über den ganzen Raum zu erstrecken ist. Ferner ist  $g$  die universelle Konstante der Fermischen Theorie und

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 \div 1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 \div 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn man den Einfluss der Kernladung auf die Eigenfunktion des Elektrons vernachlässigt, so dass man für  $\psi_s$  und  $q_\sigma$  ebene Wellen benutzen kann, wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein  $\beta$ -Elektron mit einer Energie zwischen  $E$  und  $E + dE$  emittiert wird für »erlaubte« Übergänge nach dieser Theorie gleich

$$W(E) dE = g^2 \frac{2\pi}{\hbar} \frac{(4\pi)^2}{(hc)^6} |(P|1|N)|^2 \cdot (E^2 \div m^2 c^4)^{1/2} \cdot E \cdot (D \div E)^2 \cdot dE, \quad (2)$$

wo  $D$  die Differenz der Energie des Kernes vor und nach dem Prozess ist.  $D$  ist also gleich der oberen Grenze des  $\beta$ -Spektrums, wenn man die Ruheenergie des Elektrons miteinbezieht. Ferner ist

$$(P|1|N) = \int \Phi_N(\mathbf{X}) \bar{\psi}_p(\mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X}, \quad (3)$$

was man aus (1) erhält unter der Voraussetzung, dass die DE BROGLIE-Wellenlängen des Elektrons und des Neutrinos gross sind im Vergleich mit den Kerndimensionen.

Um nun den in der Einleitung erwähnten Prozess zu erhalten, bei dem ein Positron entsteht, müssen wir ausser der Fermischen Wechselwirkung zwischen schweren und leichten Teilchen auch die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen Elektronen unter sich und zwischen den Elektronen und Protonen berücksichtigen, und zwar genügt es nicht einfach die Coulombwechselwirkung zu nehmen, da die  $\beta$ -Teilchen Geschwindigkeiten haben, welche mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar sind. Die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen den Elektronen gestatten einen Übergang bei dem ein Elektron übergeht vom Zustand  $1^\circ$  in den Zustand 1, während gleichzeitig ein zweites Elektron übergeht vom Zustand  $s$  in den Zustand 2. Solange man sich nun auf die Näherung beschränkt, in der die Wahrscheinlichkeitsamplitude proportional dem Quadrat der elektrischen Ladung ist, kann man bekanntlich<sup>1</sup> die Wechselwirkung beschreiben durch Einführung eines Operators, dessen Matrixelement für den betrachteten Übergang  $(1^\circ, s) \rightarrow (1, 2)$  die folgende Form hat

$$(1, 2 | U | 1^\circ, s) = (2 | \div e \Phi_{1, 1^\circ}(\boldsymbol{x}) \div e(\alpha, \boldsymbol{A}_{1, 1^\circ}(\boldsymbol{x})) | s). \quad (4)$$

$\Phi_{1, 1^\circ}(\boldsymbol{x})$  und  $\boldsymbol{A}_{1, 1^\circ}(\boldsymbol{x})$  bilden zusammen die zur Zeit  $t = 0$  und an der Stelle  $\boldsymbol{x}$  genommenen Komponenten des Viererpotentials, welches der dem Übergang  $1^\circ \rightarrow 1$  zugeordneten Ladungs- und Stromverteilung entspricht.

Für den Fall dass  $1^\circ$  und 1 beide freie Zustände sind mit den Eigenfunktionen

<sup>1</sup> C. MÖLLER, I: Zs. f. Phys. 70, 786 (1931); II: Ann. d. Phys. 14, 531 (1932). L. ROSENFELD, Zs. f. Phys. 73, 253 (1931). H. BETHE und E. FERMI, Zs. f. Phys. 77, 296 (1932). V. A. FOCK und B. PODOLSKY, Sow. Phys. 2, 275 (1932).

$$\psi_{1^{\circ}} = \frac{u_{1^{\circ}}}{V^{1/2}} \cdot e^{\frac{i}{\hbar c}(\mathbf{p}_{1^{\circ}}, \mathbf{x})}, \quad \psi_1 = \frac{u_1}{V^{1/2}} \cdot e^{\frac{i}{\hbar c}(\mathbf{p}_1, \mathbf{x})} \quad (5)$$

hat man<sup>1</sup>

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{1, 1^{\circ}} &= \frac{h^2 c^2 e}{\pi V} \frac{\bar{u}_1 u_{1^{\circ}} \cdot e^{\frac{i}{\hbar c}(\mathbf{p}_{1^{\circ}} \div \mathbf{p}_1, \mathbf{x})}}{|\mathbf{p}_{1^{\circ}} \div \mathbf{p}_1|^2 \div (E_{1^{\circ}} \div E_1)^2} \\ \mathbf{A}_{1, 1^{\circ}} &= \frac{h^2 c^2 e}{\pi V} \frac{\bar{u}_1 \alpha u_{1^{\circ}} \cdot e^{\frac{i}{\hbar c}(\mathbf{p}_{1^{\circ}} \div \mathbf{p}_1, \mathbf{x})}}{|\mathbf{p}_{1^{\circ}} \div \mathbf{p}_1|^2 \div (E_{1^{\circ}} \div E_1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Hier bedeuten  $\frac{\mathbf{p}_{1^{\circ}}}{c}$ ,  $E_{1^{\circ}}$  und  $\frac{\mathbf{p}_1}{c}$ ,  $E_1$  die Impulse und Energien der Elektronen in den Zuständen  $1^{\circ}$  und 1, während  $u_{1^{\circ}}$  und  $u_1$  die entsprechenden vierkomponentigen auf eins normierten DIRAC'schen Wellenamplituden darstellen. Endlich ist  $V$  wie gewöhnlich das Volumen eines grossen Kastens, in dem wir uns das ganze System eingesperrt denken.

Entsprechend ist die Wechselwirkung zwischen Proton und Elektron beschrieben durch einen Operator mit dem Matrixelement

$$(1, P | U_p | 1^{\circ}, P') = (P | + e \Phi_{1, 1^{\circ}} + e(\alpha^P, \mathbf{A}_{1, 1^{\circ}}) | P'), \quad (7)$$

wo  $P$  und  $P'$  zwei Protonenzustände sind, und  $\alpha^P$  der DIRAC'sche Matrixvektor für das Proton darstellt.

Es ist nun klar, dass man in höherer Näherung einen Prozess erhalten kann, bei dem das  $\beta$ -Teilchen im Moment seiner Entstehung einen Teil seiner Energie an ein Elektron in einem Zustand negativer Energie abgibt, so dass sich ein Neutron im Zustand  $N$  in ein Proton im Zustand  $P$  verwandelt unter Emission eines Neutrinos im Zustand  $\sigma$ , zweier Elektronen in den Zuständen 1 und 2 und eines

<sup>1</sup> loc. cit. C. MØLLER, I Seite 789, Formel (4).



Positrons, das dem freigewordenen negativen Elektronenzustand  $1^\circ$  entspricht.

Die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für diesen Prozess ist dann nach der gewöhnlichen Störungsrechnung gegeben durch

$$\frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_N + E_{1^\circ} \div E_P \div E_\sigma \div E_1 \div E_2) \cdot \left| \sum_s \frac{(1, 2 | U | 1^\circ, s) (P | c_{s\sigma} | N)}{E_1 + E_2 \div E_{1^\circ} \div E_s} + \sum_{P'} \frac{(1, P | U_P | 1^\circ, P') (P' | c_{2\sigma} | N)}{E_1 + E_P \div E_{1^\circ} \div E_{P'}} \div (\text{dasselbe mit 1 und 2 vertauscht}) \right|^2 \quad (8)$$

wo die Summationen über  $s$  und  $P'$  über alle Elektronen- bzw. alle Protonenzustände zu erstrecken sind. Das letzte Glied (dasselbe mit 1 und 2 vertauscht) ist ein Austauschglied, das der Gleichartigkeit der beiden Elektronen Rechnung trägt. (8) verschwindet also wie das Pauliprinzip verlangt, wenn die Zustände 1 und 2 identisch sind.

Wir setzen jetzt für die Eigenfunktionen der Elektronenzustände 2 und  $s$  die ebenen Wellen

$$\psi_2 = \frac{u_2}{V^{1/2}} \cdot e^{\frac{i}{\hbar c}(\mathbf{p}_2, \mathbf{x})}, \quad \psi_s = \frac{u_s}{V^{1/2}} \cdot e^{\frac{i}{\hbar c}(\mathbf{p}_s, \mathbf{x})}, \quad (9)$$

indem wir hier überall den Einfluss der Kernladung vernachlässigen.

Einsetzen von (6) und (9) in (4) ergibt dann

$$(1, 2 | U | 1^\circ, s) = \frac{\hbar^2 c^2 e^2}{\pi V^2} \frac{\bar{u}_1 u_{1^\circ} \cdot \bar{u}_2 u_s \div (\bar{u}_1 \alpha u_{1^\circ}, \bar{u}_2 \alpha u_s)}{|\mathbf{p}_{1^\circ} \div \mathbf{p}_1|^2 \div (E_{1^\circ} \div E_1)^2} \cdot \int e^{\frac{i}{\hbar c}(\mathbf{p}_{1^\circ} \div \mathbf{p}_1 \div \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_s, \mathbf{x})} d\mathbf{x}. \quad (10)$$

Das in (10) auftretende Integral über das Volumen des Kastens ist wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen gleich Null, ausser wenn  $\mathbf{p}_s = \mathbf{p}'$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \div \mathbf{p}_1^\circ \quad (11)$$

und ist in diesem Fall gleich  $V$ , so dass der Impuls im Gegensatz zur Energie beim Übergang in einen Zwischenzustand erhalten bleibt. Daher reduziert sich die Summation über  $s$  in (8) auf eine Summe über die vier zu dem durch (11) gegebenen Impuls  $\mathbf{p}_s = \mathbf{p}'$  gehörigen Zustände. Diese letzte Summation lässt sich mit Hilfe der von CASIMIR<sup>1</sup> stammenden Methode ausführen; zum Beispiel wird unter Benutzung von (1) und (3)

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{p}_s = \mathbf{p}'} \frac{\bar{u}_2 u_s \cdot (P | c_{s\sigma} | N)}{E_1 + E_2 \div E_1^\circ \div E_s} &= \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{p}_s = \mathbf{p}'} \frac{\bar{u}_2 (E + H') u_s \cdot \bar{u}_s \delta \bar{u}_\sigma}{E^2 \div E_s^2} (P | 1 | N) = \\ &= \frac{g}{V} \frac{(P | 1 | N)}{E^2 \div \mathbf{p}'^2 \div m^2 c^4} \cdot \bar{u}_2 (E + H') \delta \bar{u}_\sigma, \end{aligned} \quad (12)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} H' &= \div (\alpha, \mathbf{p}') \div \beta m c^2 \\ E &= E_1 + E_2 \div E_1^\circ \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

gesetzt ist.

Für die Summe über  $s$  in (8) erhält man so, indem man

$$I = E^2 \div \mathbf{p}'^2 \div m^2 c^4, \quad I_1 = (E_1^\circ \div E_1)^2 \div |\mathbf{p}_1^\circ \div \mathbf{p}_1|^2 \quad (14)$$

gesetzt hat,

$$\begin{aligned} \div \frac{gh^2 c^2 e^2}{\pi V^2} (P | 1 | N) \frac{[\bar{u}_1 u_1^\circ \cdot \bar{u}_2 \div (\bar{u}_1 \alpha u_1^\circ, \bar{u}_2 \alpha)] (E + H') \delta \bar{u}_\sigma}{I \cdot I_1} &= \\ = \div \frac{gh^2 c^2 e^2}{\pi V^2} (P | 1 | N) \cdot X_{12}^e, \end{aligned} \quad (15)$$

wo  $X_{12}^e$  als Abkürzung eingeführt ist.

<sup>1</sup> H. CASIMIR, Helv. Phys. Act. 6, 287 (1933).

Bei der Auswertung der Summe über  $P'$  in (8) kann man das zweite Glied in (7) vernachlässigen, da es proportional ist dem Verhältnis zwischen Protonengeschwindigkeit und Lichtgeschwindigkeit. Benutzt man ferner, dass unter den früher erwähnten Voraussetzungen über die DE BROGLIE-Wellenlängen der Elektronen

$$\int \overline{\psi}_{P'} \psi_{P'} \cdot e^{\frac{i}{\hbar c}(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_1, X)} d\mathbf{X} = \int \overline{\psi}_{P'} \psi_{P'} \cdot d\mathbf{X} = \begin{cases} 0 & \text{für } P' \neq P \\ 1 & \text{für } P' = P \end{cases}$$

erhält man für die Summe über  $P'$  unter Benutzung von (6)

$$+ \frac{gh^2 c^2 e^2}{\pi V^2} (P|1|N) \frac{\bar{u}_1 u_1 \cdot \bar{u}_2 \delta \bar{u}_\sigma}{I_1 \cdot (E_1 \div E_1^\circ)} = + \frac{gh^2 c^2 e^2}{\pi V^2} (P|1|N) \cdot X_{12}^P \quad (16)$$

wo  $X_{12}^P$  wieder als Abkürzung steht.

Wir fragen jetzt nach der Wahrscheinlichkeit eines Prozesses, bei dem  $\mathbf{p}_1$  in dem Intervall  $[d\Omega_1; (E_1, E_1 + dE_1)]$ ,  $\mathbf{p}_2$  in  $[d\Omega_2; (E_2, E_2 + dE_2)]$ ,  $\mathbf{p}_\sigma$  in  $[d\Omega_\sigma; (E_\sigma, E_\sigma + dE_\sigma)]$  und schliesslich  $\div \mathbf{p}_1^\circ$  in  $[d\Omega_1^\circ; (\div E_1^\circ, \div E_1^\circ + dE^+)]$  liegt, wobei  $d\Omega_1$  usw. die Raumelemente der respektiven Emissionsrichtungen bedeuten. Diese Wahrscheinlichkeit erhält man aus (8) durch Multiplikation mit den Faktoren

$$\left. \begin{aligned} & \frac{V d\Omega_1 p_1 E_1 dE_1}{(hc)^3}, & \frac{V d\Omega_2 p_2 E_2 dE_2}{(hc)^3}, & \frac{V d\Omega_\sigma E_\sigma^2 dE_\sigma}{(hc)^3}, \\ & & & \frac{V d\Omega_1^\circ p_1^\circ |E_1^\circ| dE^+}{(hc)^3}, \end{aligned} \right\} (17)$$

welche die Anzahl der Zustände in den betreffenden Intervallen angeben.

Wir summieren jetzt diese Wahrscheinlichkeit über alle Zustände des Neutrinos und über alle Spinzustände der Elektronen und des Positrons. Ferner integrieren wir über

alle Raumwinkel und erhalten dadurch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Elektronen und das Positron mit Energien in den Intervallen  $(E_1, E_1 + dE_1)$ ,  $(E_2, E_2 + dE_2)$  und  $(\div E_{1^0}, \div E_{1^0} + dE^+)$  emittiert werden. Indem wir die Energie  $\div E_{1^0}$  des Positrons auch mit  $E^+$  bezeichnen,  $E_N \div E_P = D$  setzen und (13), (15) und (16) benützen, erhalten wir für diese Wahrscheinlichkeit den Ausdruck

$$P(E_1, E_2, E^+) dE_1 dE_2 dE^+ = \frac{2 \pi}{\hbar} \frac{V^4 p_1 E_1 p_2 E_2 (D \div E)^2 p_{1^0} E^+}{(hc)^{12}} g^2 (hc)^4 e^4 | \langle P | 1 | N \rangle |^2 (4\pi)^4 \cdot f(E_1, E_2, E_{1^0}) dE_1 dE_2 dE^+, \quad (18)$$

$$f(E_1, E_2, E_{1^0}) = \frac{1}{(4\pi)^4} \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 \int d\Omega_{1^0} \int d\Omega_{\sigma} \sum | X_{12}^e \div X_{12}^P \div (X_{21}^e \div X_{21}^P) |^2. \quad (19)$$

Hier bedeutet  $\sum$  Summation über die zwei möglichen Spin-zustände der beiden Elektronen, des Positrons und des Neutrinos, während  $X_{21}^e$  und  $X_{21}^P$  aus  $X_{12}^e$  und  $X_{12}^P$  durch Vertauschung von 1 und 2 hervorgehen.

Mit Hilfe von (2) kann man schliesslich (18) in der folgenden Form schreiben

$$P(E_1, E_2, E^+) = \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{4}{\pi^2} p_1 E_1 p_2 E_2 p_{1^0} E^+ \frac{W(E)}{E \cdot (E^2 \div m^2 c^4)^{1/2}} \cdot f(E_1, E_2, E_{1^0}). \quad (20)$$

Die Formel (20) gilt unverändert, wenn man statt des Fermischen Wechselwirkungsansatzes den Ansatz von KONOPINSKY und UHLENBECK<sup>1</sup> benutzt, nur hat man dann für

<sup>1</sup> E. J. KONOPINSKY und G. E. UHLENBECK, Phys. Rev. 48, 7 (1935).

$W(E)$  den entsprechenden Ausdruck einzusetzen. Vielleicht gilt (20) sogar unabhängig von speziellen Annahmen über den Mechanismus des  $\beta$ -Zerfalls.

## § 2.

Bevor wir zu einer näheren Auswertung von (20) übergehen, wollen wir jetzt zeigen, dass diese Formel sich auch mit Hilfe der von TISZA benutzten Methode ableiten lässt. Da in der Arbeit von TISZA die allgemeine Formel nicht angegeben ist, indem er schon bei der Herleitung seiner Endformeln gewisse Approximationen einführt, müssen wir hier erst kurz die Ableitung der allgemeinen Formel mit Hilfe dieser Methode skizzieren.

Nach TISZA beschreibt man das ausgehende  $\beta$ -Teilchen mit der Energie  $E$  durch eine passende Mischung der folgenden vier singulären Lösungen der DIRAC-Gleichung, welche alle auslaufende Kugelwellen darstellen.

$$\psi_{a_1}^+ = N_{a_1} \cdot \begin{cases} \frac{i\hbar c}{E + mc^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \div i \frac{\partial}{\partial y} \right) U \\ \div \frac{i\hbar c}{E + mc^2} \frac{\partial}{\partial z} U \\ 0 \\ U \end{cases} \quad \psi_{a_1}^- = N_{a_1} \cdot \begin{cases} \frac{i\hbar c}{E + mc^2} \frac{\partial}{\partial z} U \\ \frac{i\hbar c}{E + mc^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) U \\ U \\ 0 \end{cases} \quad (21)$$

$$\psi_{a_2}^+ = N_{a_2} \cdot \begin{cases} 0 \\ U \\ \frac{i\hbar c}{E \div mc^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \div i \frac{\partial}{\partial y} \right) U \\ \div \frac{i\hbar c}{E \div mc^2} \frac{\partial}{\partial z} U \end{cases} \quad \psi_{a_2}^- = N_{a_2} \cdot \begin{cases} U \\ 0 \\ \frac{i\hbar c}{E \div mc^2} \frac{\partial}{\partial z} U \\ \frac{i\hbar c}{E \div mc^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) U \end{cases} \quad (22)$$

$$U = \frac{e^{\frac{i}{\hbar c} p r}}{r} \quad N_a = \left( \frac{E + \varepsilon_a m c^2}{8 \pi p c} \right)^{1/2} \quad p = (E^2 - m^2 c^4)^{1/2}$$

$$\varepsilon_a = \begin{cases} +1 & \text{für } a = a_1 \\ -1 & \text{für } a = a_2 \end{cases}$$

Die Lösungen  $a_1$  und  $a_2$  entsprechen den Fällen  $l = 0$ ,  $j = \frac{1}{2}$  bzw.  $l = 1$ ,  $j = \frac{1}{2}$  und sind so normiert, dass der gesamte Strom durch eine grosse Kugel gleich eins ist<sup>1</sup>.

Wir berechnen jetzt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das  $\beta$ -Teilchen von einem der vier Zustände  $a$  in einen Zustand 2 während gleichzeitig ein Elektron in dem negativen Zustand 1<sup>o</sup> in den positiven Zustand 1 übergeht. Um diese Übergangswahrscheinlichkeit zu erhalten, bilden wir die dem Übergang  $a \rightarrow 2$  entsprechende Strom- und Ladungsdichte

$$\div e \cdot \bar{\psi}_2 \psi_a \cdot e^{\frac{i}{\hbar c} (E - E_2) t}, \quad ce \cdot \bar{\psi}_2 \alpha \psi_a \cdot e^{\frac{i}{\hbar c} (E - E_2) t}, \quad (23)$$

wo  $\psi_2$  durch (9) gegeben ist. Wie TISZA bemerkt hat, erfüllen die Ausdrücke (23) die Kontinuitätsgleichung nur ausserhalb des singulären Nullpunktes, was damit zusammenhängt, dass  $\psi_a$  nur das auslaufende  $\beta$ -Teilchen und nicht das im Kern entstehende Proton beschreibt. Um die Kontinuitätsgleichung zu erfüllen, müssen wir daher in (23) ein Glied hinzufügen, das nur im Nullpunkt von Null verschieden ist und der entstehenden Protonenladung Rechnung trägt. Wie in § 1 können wir auch hier die Bewegung des Protons vernachlässigen, so dass in (23) nur die La-

<sup>1</sup> Vergl. KNIPP und UHLENBECK, loc. cit. p. 427. (21) stimmen, abgesehen von triviellen Phasenfaktoren, mit den Lösungen von K. und U. überein.

dungsdichte zu modifizieren ist. Nennen wir die zusätzliche Ladungsdichte  $\varrho'_{2,a} \cdot e \frac{i}{\hbar c} (E \div E_2)t$ , so lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{i}{\hbar c} (E \div E_2) [\div e \cdot \bar{\psi}_2 \psi_a + \varrho'_{2,a}] + \text{div } ce \cdot \bar{\psi}_2 \alpha \psi_a = 0. \quad (24)$$

Wenn man diese Gleichung über eine Kugel mit Radius  $r$  und Zentrum im singulären Punkt integriert und dann  $r$  gegen Null gehen lässt, erhält man mit Hilfe des GAUSS'schen Satzes

$$\varrho'_{2,a} = \frac{\hbar c \delta(\boldsymbol{x})}{i(E \div E_2)} \lim_{r \rightarrow 0} \int ce \cdot \bar{\psi}_2 \alpha_n \psi_a \cdot d\sigma, \quad (25)$$

wo  $\delta(\boldsymbol{x}) = \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z)$  und  $\delta(x)$  die DIRAC'sche Deltafunktion ist. Das Integral in (25) ist über die ganze Oberfläche der Kugel zu erstrecken, und  $\alpha_n$  bedeutet die Komponente von  $\alpha$  nach der äusseren Normale. Durch Einführung der Ausdrücke (9) und (21) für  $\psi_2$  und  $\psi_a$  in (25) erhält man durch elementare Rechnung

$$\varrho'_{2,a} = \div e \frac{(hc)^2 N_a \delta(\boldsymbol{x})}{\pi V^{1/2} (E \div E_2) (E + \varepsilon_a mc^2)} \cdot \bar{u}_2 u_a, \quad (26)$$

wo die Grössen  $u_{a_1}^+$ ,  $u_{a_1}^\div$  bzw.  $u_{a_2}^+$ ,  $u_{a_2}^\div$  die Amplituden der vier verschiedenen ebenen Wellen mit dem Impuls Null und der Energie  $+mc^2$  bzw.  $\div mc^2$  darstellen, also

$$u_{a_1}^+ = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad u_{a_1}^\div = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad u_{a_2}^+ = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad u_{a_2}^\div = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Die erwähnte Übergangswahrscheinlichkeit ist nun gleich

$$\frac{2\pi}{\hbar} \delta(E \div E_2 + E_1^\circ \div E_1) \left| (1 | \div e \Phi_{2,a} \div e(\alpha, \mathbf{A}_{2,a}) | 1^\circ) + \right. \\ \left. \div (\text{dasselbe mit 1 und 2 vertauscht}) \right|^2. \quad (28)$$

Hier sind  $\Phi_{2,a}$  und  $\mathbf{A}_{2,a}$  die zur  $t = 0$  genommenen retardierten Potentiale, welche der Ladungsdichte  $\rho_{2,a} = \div e \cdot \bar{\psi}_2 \psi_a + \dot{\rho}'_{2,a}$  und der Stromdichte  $ec \cdot \bar{\psi}_2 \alpha \psi_a$  entsprechen.

Zum Beispiel erhält man unter Benutzung von (5)

$$(1 | \Phi_{2,a} | 1^\circ) = \frac{\bar{u}_1 u_1^\circ}{V} \cdot \int d\mathbf{x} \rho_{2,a}(\mathbf{x}) \int d\mathbf{x}' \frac{e^{\frac{i}{\hbar c}(E \div E_2) | \mathbf{x} \div \mathbf{x}' |}}{|\mathbf{x} \div \mathbf{x}'|} \cdot \\ \cdot e^{\frac{i}{\hbar c}(\mathbf{p}_1^\circ \div \mathbf{p}_1, \mathbf{x}')} = \frac{\bar{u}_1 u_1^\circ}{V} \cdot \int d\mathbf{x} \left[ \frac{\div e \cdot \bar{u}_2 \psi_a \cdot e^{\frac{i}{\hbar c}(\mathbf{p}_2, \mathbf{x})}}{V^{1/2}} + \right. \\ \left. + \frac{\div e h^2 c^2 N_a \delta(\mathbf{x}) \cdot \bar{u}_2 u_a}{\pi V^{1/2} (E \div E_2) (E + \varepsilon_a mc^2)} \right] \frac{(hc)^2}{\pi} \frac{e^{\frac{i}{\hbar c}(\mathbf{p}_1^\circ \div \mathbf{p}_1, \mathbf{x})}}{|\mathbf{p}_1^\circ \div \mathbf{p}_1|^2 \div (E \div E_2)^2}. \quad (29)$$

In derselben Weise erhält man

$$(1 | \mathbf{A}_{2,a} | 1^\circ) = \frac{\bar{u}_1 u_1^\circ}{V} \cdot \int d\mathbf{x} ce \cdot \bar{u}_2 \alpha \psi_a \cdot e^{\frac{i}{\hbar c}(\mathbf{p}_2, \mathbf{x})} \cdot \\ \cdot \frac{(hc)^2}{\pi} \frac{e^{\frac{i}{\hbar c}(\mathbf{p}_1^\circ \div \mathbf{p}_1, \mathbf{x})}}{|\mathbf{p}_1^\circ \div \mathbf{p}_1|^2 \div (E \div E_2)^2}. \quad (30)$$

Weiter erhält man leicht mit Hilfe von (11), (14) und (21)

$$\int \psi_a e^{\frac{i}{\hbar c}(\mathbf{p}_1^\circ \div \mathbf{p}_1 \div \mathbf{p}_2, \mathbf{x})} d\mathbf{x} = \div \frac{(hc)^2}{\pi I} \cdot N_a w_a, \quad (31)$$

wo die Spinoren  $w_a$  gegeben sind durch



$$\left. \begin{aligned}
 w_{a_1}^+ &= \begin{pmatrix} \frac{p'_x \div ip'_y}{E + mc^2} \\ \frac{p'_z}{E + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & w_{a_1}^- &= \begin{pmatrix} \frac{p'_z}{E + mc^2} \\ \frac{p'_x + ip'_y}{E + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 w_{a_2}^+ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p'_x \div ip'_y}{E \div mc^2} \\ \frac{p'_z}{E \div mc^2} \end{pmatrix} & w_{a_2}^- &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p'_z}{E \div mc^2} \\ \frac{p'_x + ip'_y}{E \div mc^2} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \right\} (32)$$

Also erhält man unter Benutzung von (14), (22), (29), (30), (31) und des Energiesatzes  $E \div E_2 = E_1 \div E_1^\circ$ , der durch die Deltafunktion in (28) gesichert ist,

$$(1 \div e \Phi_{2,a} \div e(\alpha, \mathbf{A}_{2,a}) | 1^\circ) = \frac{(hc)^4 e^2}{\pi^2 V^{3/2}} \cdot \frac{1}{(8\pi pc)^{1/2} (E + \varepsilon_a mc^2)^{1/2}} \cdot \left\{ \frac{E + \varepsilon_a mc^2}{I_1 \cdot I} [\bar{u}_1 u_{1^\circ} \cdot \bar{u}_2 w_a \div (\bar{u}_1 \alpha u_{1^\circ}, \bar{u}_2 \alpha w_a)] \div \frac{\bar{u}_1 u_{1^\circ} \cdot \bar{u}_2 u_a}{I_1 \cdot (E_1 \div E_1^\circ)} \right\}. \quad (33)$$

Durch direkte Ausrechnung findet man leicht, dass

$$(E + \varepsilon_a mc^2) w_a = (E + H') u_a \quad (34)$$

wo  $H'$  und  $u_a$  durch (13) und (27) gegeben sind. Wir erhalten jetzt die Wahrscheinlichkeit,  $\Phi_a$ , einer Paarerzeugung bei dem die Energie des Elektrons bzw. des Positrons zwischen  $E_1$  und  $E_1 + dE_1$  bzw.  $E^+ = \div E_1^\circ$  und  $E^+ + dE^+$  liegt durch Multiplikation von (28) mit den Zustandsdichten

$$\frac{V p_1 E_1 dE_1 d\Omega_1}{(hc)^3}, \quad \frac{V p_2 E_2 dE_2 d\Omega_2}{(hc)^3}, \quad \frac{V p_{1^0} E^+ dE^+ d\Omega_{1^0}}{(hc)^3}$$

und Integration über  $dE_2$ ,  $d\Omega_1$ ,  $d\Omega_2$  und  $d\Omega_{1^0}$  sowie Summation über die beiden Spinrichtungen der beteiligten Teilchen. Es ergibt sich mit Hilfe von (34)

$$\Phi_a dE_1 dE^+ = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{4}{\pi^2} \frac{p_1 E_1 p_2 E_2 p_{1^0} E^+ dE_1 dE^+}{p(E + \epsilon_a mc^2)} \frac{2}{(4\pi)^3} \cdot \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 \int d\Omega_{1^0} \sum_{s_1, s_2, s_{1^0}} |A u_a|^2, \quad (35)$$

wo  $E_2$  hier überall gleich  $E \div E_1 \div E^+$  zu setzen ist, und der Spinor  $A$  gegeben ist durch

$$A = \frac{[\bar{u}_1 u_1 \cdot \bar{u}_2 \div (\bar{u}_1 \alpha u_1, \bar{u}_2 \alpha)] (E + H')}{I_1 \cdot I} \div \frac{\bar{u}_1 u_1 \cdot \bar{u}_2}{I_1 \cdot (E_1 \div E_{1^0})} \quad (36)$$

÷ (dasselbe mit 1 und 2 vertauscht).

Wir müssen jetzt die  $\Phi_a$ 's in denjenigen Verhältnissen kombinieren, in welchen die  $\psi_a$ 's in den  $\beta$ -Strahlen vertreten sind. Wir bilden also

$$\Phi = \sum_a g_a \Phi_a, \quad \sum_a g_a = 1 \quad (37)$$

und entnehmen die Gewichte  $g_a$  aus der Fermi'schen Theorie. Nach KNIPP und UHLENBECH<sup>1</sup> ist

$$\left. \begin{aligned} g_{a_1}^+ = g_{a_1}^- = \frac{E + mc^2}{4E}, \quad g_{a_2}^+ = g_{a_2}^- = \frac{E \div mc^2}{4E} \\ \text{oder} \\ g_a = \frac{E + \epsilon_a mc^2}{4E}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

<sup>1</sup> loc. cit., p. 430.

Setzt man (35) und (38) in (37) ein, hebt sich der Faktor  $E + \varepsilon_a mc^2$  weg, so dass die Summation über  $a$  in (37) sich auf eine Summation des Ausdrucks  $|Au_a|^2$  über die vier verschiedenen Zustände  $u_a$  mit dem Impuls Null reduziert. Mit Hilfe der Vollständigkeitsrelation erhält man

$$\sum_a |Au_a|^2 = \bar{A}A. \quad (39)$$

Multiplizieren wir endlich  $\Phi$  in (37) mit dem Energiespektrum  $W(E)$  der  $\beta$ -Strahlen, erhalten wir schliesslich unter Benutzung von (22) die Grösse

$$P(E_1, E_2, E^+) = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{4}{\pi^2} \frac{p_1 E_1 p_2 E_2 p_1^+ E^+}{E (E^2 \div m^2 c^4)^{1/2}} \frac{W(E)}{(4\pi)^3} \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 \int d\Omega_{1^0} \sum_{s_1, s_2, s_{1^0}} \frac{1}{2} \bar{A}A. \quad (40)$$

was, wie man leicht sieht, mit (20) identisch ist. Wenn man nämlich die Ausdrücke für  $X_{12}^e$  usw. in (19) einsetzt, bemerkt man sofort, dass sich  $f$  in (20) in der folgenden Form schreiben lässt

$$f = \frac{1}{(4\pi)^3} \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 \int d\Omega_{1^0} \sum_{s_1, s_2, s_{1^0}} \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_\sigma \sum_{s_\sigma} |A \delta \bar{u}_\sigma|^2.$$

Führt man jetzt die Summation über die beiden Spinrichtungen und die Mittelung über alle Raumrichtungen des Neutrinos aus, erhält man

$$f = \frac{1}{(4\pi)^3} \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 \int d\Omega_{1^0} \sum_{s_1, s_2, s_{1^0}} \frac{1}{2} \bar{A}A,$$

wodurch (20) und (40) identisch werden.

## § 3.

In den erwähnten Experimenten von ALICHANOW usw. misst man direkt die Energieverteilung der Positronen sowie das Verhältnis  $\frac{N^+}{N^-}$  der totalen Anzahlen der emittierten Positronen und Elektronen. Die aus unserer Theorie folgende Energieverteilung  $W^+(E^+)$  der Positronen erhält man aus (20) durch Integration über die möglichen Werte von  $E_1$  und  $E_2$ , d. h.

$$W^+(E^+) = \int_{mc^2}^{D \div E^+ + mc^2} dE_2 \int_{mc^2}^{D \div E^+ + E_2} dE_1 P(E_1, E_2, E^+). \quad (41)$$

Die Integrationsgrenzen folgen aus der Bedingung, dass die vom Kern abgegebene Energie  $D$  zwischen den vier emittierten Teilchen zu verteilen ist; hierbei ist, wie überall, die Neutrinomasse gleich Null gesetzt. Man sieht, dass das Positronenspektrum sich über das Intervall

$$mc^2 \leq E^+ \leq D \div 2 mc^2 \quad (42)$$

erstreckt.

Für  $\frac{N^+}{N^-}$  erhält man also

$$\frac{N^+}{N^-} = \frac{\int_{mc^2}^{D \div 2 mc^2} W^+(E^+) dE^+}{\int_{mc^2}^D W(E) dE}. \quad (43)$$

Bevor wir aber (41) und (43) numerisch auswerten können, müssen wir erst die Spinsumationen in (19) ausführen. Durch Ausquadrieren von  $|X_{12}^e \div X_{12}^p \div X_{21}^e + X_{21}^p|^2$  erhält man offenbar sechzehn Glieder. Die entsprechenden sech-

zehn Spinsummationen können wieder mit Hilfe der CASIMIR'schen<sup>1</sup> Methode ausgeführt werden. Die Rechnungen sind elementar aber langwierig. Wir haben in den Schlussformeln die folgenden Symbole für die auftretenden Vierervektoren und deren Verknüpfungen eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \{ \boldsymbol{p}_1, E_1 \}, P_2 = \{ \boldsymbol{p}_2, E_2 \}, P_{1^\circ} = \{ \boldsymbol{p}_{1^\circ}, E_{1^\circ} \}, \\ P' &= \{ \boldsymbol{p}', E \} = P_1 + P_2 \div P_{1^\circ} \\ (P_1, P_2) &= E_1 E_2 \div (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2), (P', P_{1^\circ}) = E E_{1^\circ} \div (\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}_{1^\circ}) \text{ u. s. w.} \\ [P_1, P_2] &= E_1 E_2 + (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2), [P', P_{1^\circ}] = E E_{1^\circ} + (\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}_{1^\circ}) \text{ u. s. w.} \end{aligned} \right\} (44)$$

Es gilt offenbar

$$\begin{aligned} (P_1, P_1) &= E_1^2 \div \boldsymbol{p}_1^2 = m^2 c^4 = (P_2, P_2) = (P_{1^\circ}, P_{1^\circ}) \\ [P_1, P_1] &= E_1^2 + \boldsymbol{p}_1^2 = 2 E_1^2 \div m^2 c^4 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Dagegen ist

$$(P', P') \geq 9 m^2 c^4.$$

Die runden Klammern sind relativistisch invariant im Gegensatz zu den eckigen Klammern. Die letzteren treten nur in denjenigen Gliedern auf, welche von der Protonenwechselwirkung herrühren, was damit zusammenhängt, dass die schweren Teilchen von Anfang an unrelativistisch behandelt worden sind. Unter Benutzung von (44) erhält man dann für die sechzehn erwähnten Glieder, nachdem schon die Integration über die Raumrichtungen des Neutrinos ausgeführt ist:

<sup>1</sup> loc. cit.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_\sigma \sum |X_{12}^e|^2 = \\
& \quad \frac{4}{I^2 \cdot I_1^2 \cdot E_1 E_2 E_{1^\circ}} \left\{ [m^2 c^4 + (P_1, P_2) \div (P_1, P_{1^\circ}) \div (P_2, P_{1^\circ})] \cdot \right. \\
& \quad \cdot [m^2 c^4 E_2 \div E_{1^\circ} (P_1, P_2) \div E_1 (P_{1^\circ}, P_2)] + \\
& \quad \div E [2 m^2 c^4 [(P_1, P_2) \div (P_2, P_{1^\circ})] + m^2 c^4 [(P_1, P_{1^\circ}) \div m^2 c^4] + \\
& \quad \left. \div (P_1, P_2) [(P_{1^\circ}, P_1) + (P_{1^\circ}, P_2)] \div (P_{1^\circ}, P_2) [(P_1, P_2) \div (P_1, P_{1^\circ})] \right\} \\
& \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_\sigma \sum |X_{21}^e|^2 = \text{(dasselbe mit 1 und 2 vertauscht).} \\
& \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_\sigma \sum \overline{X_{21}^e} X_{12}^e = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_\sigma \sum \overline{X_{12}^e} X_{21}^e = \\
& \quad \frac{1}{I^2 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot E_1 E_2 E_{1^\circ}} \cdot \left\{ 4 m^2 c^4 E (P_1, P_2) + \right. \\
& \quad \div 4 E (P', P_{1^\circ}) [(P_1, P_2) \div m^2 c^4] + \\
& \quad \left. + 4 E_{1^\circ} [m^2 c^4 + (P_1, P_2) \div (P_1, P_{1^\circ}) \div (P_2, P_{1^\circ})] [(P_1, P_2) \div m^2 c^4] \right\}.
\end{aligned} \tag{45}$$

Diese vier Glieder enthalten nur die Wechselwirkung zwischen den Elektronen im Gegensatz zu den jetzt folgenden zwölf Gliedern, welche auch von der Wechselwirkung zwischen Proton und Elektron abhängen. Vernachlässigung der letzteren Wechselwirkung bedeutet also, dass nur die Glieder (45) in (19) übrigbleiben.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_\sigma \sum |X_{12}^P|^2 = \\
& \quad \frac{1}{I_1^2 (E_1 \div E_{1^\circ})^2 E_1 E_2 E_{1^\circ}} \cdot \left\{ E_2 [(P_1, P_{1^\circ}) + m^2 c^4] \right\} \\
& \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_\sigma \sum |X_{21}^P|^2 = \text{(dasselbe mit 1 und 2 vertauscht).}
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_\sigma \sum \bar{X}_{12}^P X_{21}^P &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_\sigma \sum \bar{X}_{21}^P X_{12}^P = \\ & \frac{1}{4 I_1 I_2 (E_1 \div E_1^\circ) (E_2 \div E_1^\circ) E_1 E_2 E_1^\circ} \cdot \left\{ E_1^\circ ([P_1, P_2] + m^2 c^4) + \right. \\ & \left. + E_1 ([P_1^\circ, P_2] + m^2 c^4) + E_2 ([P_1^\circ, P_1] + m^2 c^4) \div 2 E_1 E_2 E_1^\circ \right\} \end{aligned} \right\} (46)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_\sigma \sum \bar{X}_{12}^e X_{12}^P &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_\sigma \sum \bar{X}_{12}^P X_{12}^e = \\ & \frac{1}{I \cdot I_1^2 \cdot (E_1 \div E_1^\circ) E_1 E_2 E_1^\circ} \cdot \left\{ ([P_1, P_1^\circ] + m^2 c^4) ([P', P_2] + m^2 c^4) + \right. \\ & \left. \div E_1^\circ E_2 [P', P_1] \div E_1 E_2 [P', P_1^\circ] + E E_1^\circ (P_1, P_2) + E E_1 (P_2, P_1^\circ) \right\} \\ \\ \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_\sigma \sum \bar{X}_{21}^e X_{21}^P &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_\sigma \sum \bar{X}_{21}^P X_{21}^e = \\ & \text{(dasselbe mit 1 und 2 vertauscht)} \\ \\ \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_\sigma \sum \bar{X}_{21}^e X_{12}^P &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_\sigma \sum \bar{X}_{12}^P X_{21}^e = \\ & \frac{1}{2 I \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot (E_1 \div E_1^\circ) E_1 E_2 E_1^\circ} \cdot \left\{ \div ([P', P_2] + m^2 c^4) \cdot \right. \\ & \quad \cdot ([P_1^\circ, P_1] + m^2 c^4) + [P_2, P_1^\circ] [P', P_1] + \\ & \quad \left. \div (P_1, P_2) (P', P_1^\circ) + 2 m^2 c^4 (E E_1 + E_1^\circ E + E_2 E_1^\circ + E_1 E_2) \right\} \\ \\ \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_\sigma \sum \bar{X}_{12}^e X_{21}^P &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_\sigma \sum \bar{X}_{21}^P X_{12}^e = \\ & \text{(dasselbe mit 1 und 2 vertauscht)}. \end{aligned} \right\} (47)$$

Um jetzt  $f(E_1, E_2, E_1^\circ)$  zu erhalten, müssen wir noch die Ausdrücke (45) bis (47) über  $d\Omega_1$ ,  $d\Omega_2$  und  $d\Omega_1^\circ$  integrieren. Diese Integrationen sind jedoch analytisch schwer durchführbar, und da uns ausserdem die zwei Energie-

integrationen in (41) fehlen, sind wir bei der Durchführung der Rechnungen auf numerische Methoden angewiesen. Da aber eine mehrfache numerische Integration eine sehr erhebliche Rechenarbeit erfordert, und da es hier auf grössere Genauigkeit nicht ankommt, machen wir die folgende Approximation, deren Berechtigung wir später diskutieren werden (vergl. p. 27 ff.). Wir setzen in dem Ausdruck  $E_1 E_2 E^+ \cdot f(E_1, E_2, E_1^\circ)$

$$E_1 = E_2 = \div E_1^\circ = mc^2,$$

wodurch der Integrand in (19) eine Konstante wird. Die Raumintegrationen ergeben dann einfach einen Faktor  $(4\pi)^3$ , und man erhält

$$E_1 E_2 E^+ \cdot f = \frac{9}{128} (mc^2)^{\div 3}. \quad (48)$$

Indem wir von jetzt an alle Energien in Einheiten  $mc^2$  ausdrücken, erhalten wir für (41) unter Berücksichtigung von (2), (20), (48) und  $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$

$$\begin{aligned} W^+(E^+) &= 2.16 \times 10^{\div 5} \cdot K \cdot (E^{+2} \div 1)^{1/2} \int_1^{D \div E^+ \div 1} dE_2 \\ &\int_1^{D \div E^+ \div E_2} dE_1 (E_2^2 \div 1)^{1/2} (E_1^2 \div 1)^{1/2} (D \div E_1 \div E_2 \div E^+)^2 \frac{9}{128} = \quad (49) \\ &= 2.16 \times 10^{\div 5} \cdot K \cdot (E^{+2} \div 1)^{1/2} \cdot G_1(E^+) \end{aligned}$$

mit

$$K = g^2 \frac{2\pi}{\hbar} \frac{(4\pi)^2}{(hc)^6} |(P|1|N)|^2 (mc^2)^5. \quad (50)$$

Ebenso wird (2)

$$W(E) = K \cdot (E^2 \div 1)^{1/2} \cdot E \cdot (D \div E)^2. \quad (51)$$



Die erste Integration in (49) wurde analytisch ausgeführt, die zweite dagegen numerisch. Man erhält z. B. für  $D = 7.2$  (Ra C, obere Grenze des  $\beta$ -Spektrums bei 3.16 M.V.) die Kurve in Fig. 1.

Für andere Werte von  $D$  erhält man Kurven mit genau derselben Form. Vor allem bemerkt man, dass das Maxi-

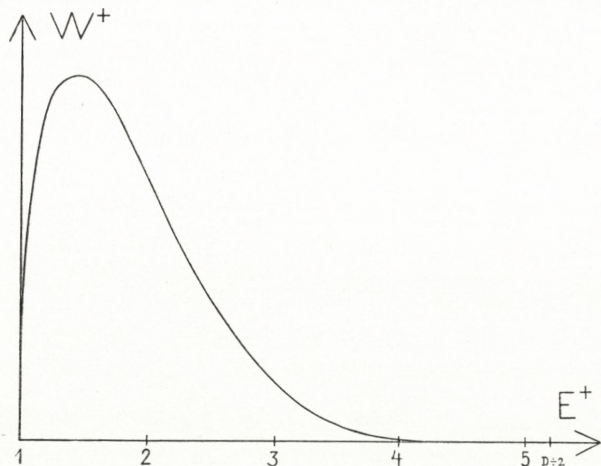


Fig. 1.

um viel weiter links liegt als bei den gewöhnlichen  $\beta$ -Spektren, indem die Kurve nach rechts einen sehr flachen Schwanz hat. Wie wir später sehen werden, ist dies Verhalten nicht durch die angewandten Approximationen vorgetauscht, indem auch die exakte Kurve dieselbe Form zeigt (siehe p. 29).

Jetzt können wir die Integrale in (43) erhalten, indem sich  $N^+$  durch numerische Integration der berechneten Positronenspektren ergibt. In Fig. 2 ist  $\frac{N^+}{N^-}$  als Funktion von  $D$  graphisch dargestellt.

In derselben Figur beträgt der entsprechende Wert für den Fall der KONOPINSKY-UHLENBECK Wechselwirkung 0.23 für  $D = 7.2$ .

Man sieht also, dass der theoretische Wert von  $\frac{N^+}{N^\pm}$  auch im besten Fall ( $D = 7.2$ , RaC) um einen Faktor  $10^3$  kleiner ist als die von ALICHANOW usw. gefundenen Werte (ca.  $2-3 \times 10^{\pm 4}$ ). Ferner bemerkt man, dass  $\frac{N^+}{N^\pm}$  theoretisch sehr

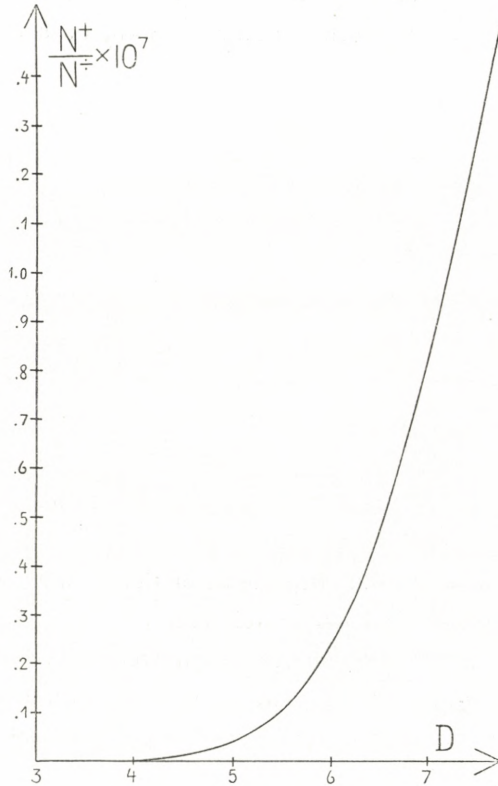


Fig. 2.

schnell mit  $D$  anwächst, während die Experimente für die Elemente RaC,  $D = 7.2$ , und Th ( $C + C''$ ),  $D = 5.4$ , ungefähr denselben Wert liefern. Die gefundenen Positronen haben daher vermutlich einen ganz anderen Ursprung.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Vergl. neue Versuche von A. I. ALICHANOW und P. E. SPIWAK. Sow. Phys. 11, 351 (1937).

Da jedoch  $\frac{N^+}{N^\div}$ , wie Fig. 2 zeigt, theoretisch sehr schnell mit  $D$  anwächst, wäre es interessant, andere  $\beta$ -Strahlen mit sehr hohen oberen Grenzen des Spektrums nach Positronen zu untersuchen. Zum Beispiel sollte der hier betrachtete Effekt bei  $Li^8$  ( $D = 20 mc^2 \approx 10$  M.V.) sehr wohl beobachtbar sein, indem  $\frac{N^+}{N^\div}$  hier von der Grössenordnung  $10^{\div 4}$  ist.

Man könnte vielleicht glauben, dass der kleine Wert von  $\frac{N^+}{N^\div}$  durch die in (48) gemachte Approximation verursacht ist. Das ist jedoch nicht der Fall. Wenn man nämlich die Funktion (48) nach oben ziemlich grob abschätzt, findet man, dass  $E_1 E_2 E^+ \cdot f$  für  $D = 7.2$  bzw.  $D = 5.0$  sicher für alle Werte von  $E_1, E_2, E^+$ , mit  $3 \leq E_1 + E_2 + E^+ \leq D$ , bedeutend kleiner ist als  $12.8 (mc^2)^{\div 3}$  bzw.  $3.03 (mc^2)^{\div 3}$ . Benutzt man diese Werte statt (48) werden die entsprechenden Werte von  $\frac{N^+}{N^\div}$  gleich  $1.8 \times 10^{\div 5}$  bzw.  $2.0 \times 10^{\div 7}$ , was noch immer wenigstens um einen Faktor 10 zu klein ist.

Zum Schluss müssen wir noch kurz die Berechtigung der in (48) gemachten Approximation diskutieren. Wir haben also die angenäherte Funktion (49) mit der folgenden exakten zu vergleichen

$$\begin{aligned}
 W^+(E^+) &= 2.16 \times 10^{\div 5} \cdot K \cdot (E^{+\div 2} \div 1)^{1/2} \int_1^{D \div E^+ \div 1} dE_2 \int_1^{D \div E^+ \div E_2} dE_1 \cdot \\
 (E_2^2 \div 1)^{1/2} (E_1^2 \div 1)^{1/2} (D \div E_1 \div E_2 \div E^+)^2 \cdot E_1 E_2 E^+ \cdot f(E_1, E_2, E_1^+) &= \\
 &= 2.16 \times 10^{\div 5} \cdot K \cdot (E^{+\div 2} \div 1)^{1/2} \cdot G(E^+),
 \end{aligned} \tag{52}$$

die man aus (41) erhält, wenn man (50) benutzt und wieder  $mc^2$  als Energieeinheit einführt. Die Approximationsfunktion  $G_1(E^+)$  in (49) unterscheidet sich von der exakten Funktion  $G(E^+)$  in (52) dadurch, dass man in dieser den Faktor

$E_1 E_2 E^+ \cdot f$  konstant gleich seinem Wert für  $E_1 = E_2 = E^+ = 1$  gesetzt hat. Das ist natürlich für nicht zu kleine  $D$  eine sehr grobe Approximation. Eine bedeutend bessere Approximationsfunktion, wir nennen sie  $G_2(E^+)$ , würde man erhalten, wenn man in  $E_1 E_2 E^+ \cdot f$  nur  $E^+$  von vorn herein gleich 1 setzt. Dadurch wird der Integrand in (19) soviel vereinfacht, dass die Raumintegrationen sich verhältnismässig einfach analytisch durchführen lassen.  $G_2(E^+)$  stimmt offenbar für  $E^+ = 1$  mit  $G(E^+)$  überein und bleibt eine sehr gute Annäherung, solange  $E^+ \div 1 < 1$  ist. Für  $D < 4$  ist ferner  $G_1 \approx G_2 \approx G$ . Um aber zu sehen, wieviel sich  $G_1(1)$  für grössere Werte von  $D$  von  $G_2(1) = G(1)$  unterscheidet, haben wir den Wert der letzteren für  $D = 7.2$  berechnet. Man findet  $G_2(1) = G(1) = 4.8$  während  $G_1(1)$  gleich 3.6 war. Die Abweichung beträgt also sogar für den höchsten in den Experimenten von Alichanow usw. vorkommenden Wert von  $D$  nur 25 0/0.

In dem Gebiet  $E^+ > D \div 3$  erhält man eine andere sehr gute Annäherungsfunktion,  $G_3(E^+)$ , indem man den Faktor  $E_1 E_2 E^+ \cdot f$  konstant gleich seinem Wert an der oberen Grenze des Spektrums setzt. Da dort  $E^+ = D \div 2$  und somit  $E_1 = E_2 = 1$ , erhält man leicht

$$E_1 E_2 E^+ \cdot f = \frac{D^2 (D \div 2)}{8 (D \div 1)^4}.$$

Es ist also

$$G_3(E^+) = \frac{D^2 (D \div 2)}{8 (D \div 1)^4} \cdot \frac{128}{9} \cdot G_1(E^+),$$

wo der Faktor gegen 1 geht für  $D \rightarrow 3$ .

Weiter erkennt man durch elementare Differentiation, dass die vier genannten  $G$ -Funktionen sowie ihre vier ersten Ableitungen sämtlich an der oberen Grenze  $E^+ = D \div 2$

verschwinden, sodass sie alle und damit auch die entsprechenden  $W^+$ -Kurven den p. 25 besprochenen Schwanz aufweisen. Eben aus diesem Grunde ist das Gültigkeitsgebiet der  $G_3$ -Kurve für die Berechnung der totalen Positronenanzahl  $N^+$  unwesentlich.

Aus allen diesen Gründen haben wir uns wegen der hier erforderlichen Genauigkeit mit der Berechnung der im Verhältnis zu  $G$  und  $G_2$  viel einfacheren Funktion  $G_1(E^+)$  begnügt.

### Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wurde die innere Paarerzeugung beim  $\beta$ -Zerfall theoretisch behandelt. § 1 gibt eine Darstellung der Theorie sowie die allgemeine Formel für die Wahrscheinlichkeit dieses Prozesses. In § 2 wird gezeigt, dass die von TISZA für die Behandlung desselben Problems herangezogene Methode trotz des gänzlich verschiedenen Ausgangspunktes dieselbe Endformel liefert wie die in § 1 entwickelte Theorie. Schliesslich folgt in § 3 auf Grund der allgemeinen Formeln des § 1 die numerische Berechnung des Positronenspektrums sowie der relativen Anzahl  $\frac{N^+}{N^-}$  der emittierten Positronen und Elektronen als Funktion der oberen Grenze des  $\beta$ -Spektrums. Es zeigt sich, dass die theoretischen Werte von  $\frac{N^+}{N^-}$  viel zu klein sind um die Experimente von ALICHANOW, ALICHANIAN und KOSODAEW zu erklären. Da jedoch  $\frac{N^+}{N^-}$  sehr schnell mit der oberen Grenze des  $\beta$ -Spektrums anwächst, würde die innere Paarerzeugung bei Elementen mit höheren Werten der oberen Grenze des  $\beta$ -Spektrums

sehr wohl beobachtbar sein. Zum Beispiel ist bei  $\text{Li}^8$  mit der oberen Grenze bei 10 M.V.  $\frac{N^+}{N^-}$  von der Grössenordnung  $10^{\pm 4}$ .

Zum Schluss möchten wir Herrn Professor N. BOHR für sein freundliches Interesse an dieser Arbeit herzlichst danken.

